

問 題 紙

佐賀大学大学院理工学研究科

令和6年度佐賀大学大学院理工学研究科（博士前期課程）

入 学 試 験 問 題

科目名	1 群	(そ の 一)	数学専門：微分積分学，線形代数学
-----	-----	---------	------------------

- 1 $M_2(\mathbf{C})$ を 2 次複素正方行列全体のなす複素ベクトル空間とする．2 次複素正方行列 A に対して， $M_2(\mathbf{C})$ の部分集合 $F(A)$ を

$$F(A) = \{ X \in M_2(\mathbf{C}) \mid AX = XA \}$$

で定める．次の問いに答えよ．

- (1) $F(A)$ は $M_2(\mathbf{C})$ の部分空間であることを示せ．

- (2) $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ ($\alpha \neq \beta$) とする．このとき $F(A)$ の基底を 1 組求めよ．

- (3) 2 次複素正方行列 A と 2 次複素正則行列 P に対して， $B = P^{-1}AP$ とおく．このとき， $F(A)$ の任意の元 X に対して $P^{-1}XP$ は $F(B)$ の元となることを示せ．また，写像

$$g_P: F(A) \rightarrow F(B)$$

を $g_P(X) = P^{-1}XP$ で定めると， g_P は同型写像になることを示せ．

- (4) A がスカラー行列でないとき， $F(A)$ の次元を求めよ．

問 題 紙

佐賀大学大学院理工学研究科

令和6年度佐賀大学大学院理工学研究科（博士前期課程）
入 学 試 験 問 題

科目名	1 群	（そ の 二）	数学専門：微分積分学，線形代数学
-----	-----	---------	------------------

2 A を 3×4 の実行列， B を 4×3 の実行列とし，

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

を満たしているとする．次の問いに答えよ．

- (1) $P^{-1}ABP$ が対角行列となる 3 次実正則行列 P を 1 つ求めよ．また，そのときの対角行列 $P^{-1}ABP$ を求めよ．
- (2) α を AB の固有値とし， $\boldsymbol{v}$ を AB の固有値 α に対する固有ベクトルとする．このとき， $B\boldsymbol{v}$ は BA の固有値 α に対する固有ベクトルになることを示せ．
- (3) A, B および BA の階数を求めよ．
- (4) BA が対角化可能であることを示せ．また， BA の対角化を 1 つ求めよ．

問 題 紙

佐賀大学大学院理工学研究科

令和6年度佐賀大学大学院理工学研究科（博士前期課程）

入 学 試 験 問 題

科目名	1 群	(そ の 三)	数学専門：微分積分学，線形代数学
-----	-----	---------	------------------

3 次の問いに答えよ.

- (1) $f(x, y)$ を $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ 上で定義された C^2 級関数とし, $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ とおく. $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ とするとき,

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}$$

を r , θ , $\frac{\partial g}{\partial r}$, $\frac{\partial g}{\partial \theta}$ を用いて表せ.

- (2) $0 < \varepsilon < 1$ に対し, $D_\varepsilon = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \varepsilon \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$ とおく. また, $\alpha > 0$ とする. 極限

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \iint_{D_\varepsilon} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^\alpha}$$

が有限の値として存在するための α に関する必要十分条件を求めよ. さらに, 極限が有限の値として存在するとき, その値を求めよ.

問 題 紙

佐賀大学大学院理工学研究科

令和6年度佐賀大学大学院理工学研究科（博士前期課程）

入 学 試 験 問 題

科目名	1 群	(そ の 四)	数学専門：微分積分学，線形代数学
-----	-----	---------	------------------

- 4 次の問いに答えよ．ただし，上に有界な単調増加列や下に有界な単調減少列がともに収束することは証明なしに用いてよい．

(1) 数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ を 0 に収束する単調減少列とし， $S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} b_k$ とおく．数列 $\{S_{2l}\}_{l=1}^{\infty}$ が上に有界な単調増加列であることを示せ．
また，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$ が収束することを示せ．

(2) $2 \leq a < b < \infty$ のとき， $\int_a^b \frac{dx}{x(\log x)^2}$ を a, b を用いて表せ．また，
級数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}$ が収束することを示せ．