問　題　紙

佐賀大学大学院理工学研究科

令和3年度佐賀大学大学院理工学研究科（修士課程）
入　学　試　験　問　題

科目名	1群	（その一）	数学専門：微分積分学，線形代数学

1 $\boldsymbol{C}^n$ を複素数体 $\boldsymbol{C}$ 上の n 次元数ベクトル空間とし，V_1, V_2 を $\boldsymbol{C}^n$ の部分空間とする．次の問いに答えよ．

(1) V_1 と V_2 の直積空間 $V_1 \times V_2 = \{(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) \mid \boldsymbol{v}_i \in V_i\ (i = 1, 2)\}$ から $\boldsymbol{C}^n$ への線形写像 f を $f(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ で定めるとき，f の核 $\mathrm{Ker}(f)$ は，$V_1 \cap V_2$ と同型になることを示せ．

(2) ベクトル空間 V の次元を $\dim V$ と書くとき，V_1 と V_2 の和空間

$$V_1 + V_2 = \{\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \mid \boldsymbol{v}_i \in V_i\ (i = 1, 2)\}$$

に対し，線形写像の次元定理を用いて

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$$

が成り立つことを示せ．

(3) $i = 1, 2$ に対して，線形写像 $f_i : \boldsymbol{C}^3 \to \boldsymbol{C}$ を

$$f_1\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = 2x_1 - x_2 - x_3, \quad f_2\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = x_1 - 2x_2 + x_3$$

によって定め，$V_i = \mathrm{Ker}(f_i)$ とするとき，

$$\dim V_1, \quad \dim V_2, \quad \dim(V_1 \cap V_2), \quad \dim(V_1 + V_2)$$

をそれぞれ求めよ．

問　題　紙

佐賀大学大学院理工学研究科

令和3年度佐賀大学大学院理工学研究科（修士課程）
入　学　試　験　問　題

科目名	1群	（その二）	数学専門：微分積分学，線形代数学

2 $\boldsymbol{C}^n$ を複素数体 $\boldsymbol{C}$ 上の n 次元数ベクトル空間とし，A を複素数を成分とする n 次正方行列とする．複素数 α に対して，線形写像 $f_\alpha : \boldsymbol{C}^n \to \boldsymbol{C}^n$ を

$$f_\alpha(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v} - \alpha\boldsymbol{v} \ (\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{C}^n)$$

によって定めるとき，次の問いに答えよ．

(1) α についての次の二つの条件が同値であることを示せ．

(i) f_α の像 $\mathrm{Im}(f_\alpha)$ の次元 $\dim(\mathrm{Im}(f_\alpha))$ は n に等しい．

(ii) α は A の固有値でない．

(2) $n = 3, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ とするとき，$\dim(\mathrm{Im}(f_\alpha))$ を求めよ．

(3) m を2以上の整数とするとき，(2) の n, A に対して $\dim(\mathrm{Im}(f_\alpha^m))$ を求めよ．ただし f_α^m は，$f_\alpha^m(\boldsymbol{v}) = f_\alpha(f_\alpha^{m-1}(\boldsymbol{v}))$ によって帰納的に定義される，f_α の m 回反復合成写像とする．

問　　題　　紙

佐賀大学大学院理工学研究科

令和３年度佐賀大学大学院理工学研究科（修士課程）
入　学　試　験　問　題

科目名	1群

（そ　の　三）

数学専門：微分積分学，線形代数学

$\boxed{3}$ 関数 $f(x) = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ の定義域を $(0, \frac{\pi}{2})$ とする.

(1) 逆関数 $f^{-1}(x)$ が存在することを示せ.

(2) $f^{-1}(x)$ の定義域を求めよ.

(3) $f^{-1}(x) = \operatorname{arcsec} x$ の導関数が $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ となることを示せ.

問　題　紙

佐賀大学大学院理工学研究科

令和3年度佐賀大学大学院理工学研究科（修士課程）
入　学　試　験　問　題

科目名	1群	（その四）	数学専門：微分積分学，線形代数学

$\boxed{4}$

(1) 領域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq x\}$ を図示せよ．また，x, y を極座標で表したとき，D を r, θ の不等式で表せ．

(2) 球 $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ と円柱 $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq x\}$ の共通部分の立体の体積 V を求めよ．