

採点は解答用紙のみで行う．計算/下書き用紙は採点対象外なので、
答えに至るまでの計算過程や説明等はすべて解答用紙に記入すること．

1

(1) 広義積分 $\int_0^{\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$ の値を求めよ．

(2) 関数 $f(x) = \log(1+x)$, $g(x) = \log \frac{1+x}{1-x}$ の $x=0$ におけるテイラー展開をそれぞれ

$$f(x) = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \cdots, \quad g(x) = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \cdots$$

とするとき、定数 a, b, c, d および $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ の値を求めよ．

(3) $z = h(x, y)$ を C^2 級関数とする． $x = st, y = s + t$ とするとき、偏導関数 z_s および z_{st} を $z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, s, t$ で表せ．

(4) $u = x + y, v = x - y$ とおくことにより、次の重積分の値を求めよ．

$$\iint_D (x+y) \cos(x^2 - y^2) dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid 0 \leq x + y \leq 1, 0 \leq x - y \leq \pi\}.$$

2

(1) 3つのベクトル

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{と行列 } A = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3] \text{ を考える.}$$

このとき、 A のランク（階数）を求めよ．また、 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ が1次独立か1次従属かを調べよ．さらに、1次従属である場合は $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ が満たす関係式を求めよ．

(2) 行列 $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ の固有値を全て求め、各固有値に対応する固有ベクトルを

1つずつ求めよ．また、 B が対角化可能か否かを判定せよ．さらに、対角化可能であれば対角化し、対角化する行列も求めよ．