問　題　紙

佐賀大学大学院工学系研究科

平成２６年度佐賀大学大学院工学系研究科（博士前期課程）
入　学　試　験　問　題

科目名	専門科目	（その一）	数理科学専攻

1 $m \times n$ 次実行列 $A = (a_{ij})$ と N 次元数ベクトル空間 $(\mathbb{R}^N, (\cdot,\cdot))$ を考える。ここで

$$\mathbb{R}^N = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \middle| \, x_1, \ldots, x_N \in \mathbb{R} \right\}$$

であり, $(\cdot,\cdot)$ は $\mathbb{R}^N$ におけるユークリッド内積を意味する。即ち, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}$ $\in \mathbb{R}^N$ に対して $(x,y) = {}^t xy = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} x_i y_i$ と定義される。そこで $f_A(x) = Ax \, (x \in \mathbb{R}^n)$ によって定まる線形写像 $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ に関して次の問いに答えよ。

(1) f_A の核 $\mathrm{Ker}\, f_A = \{x \in \mathbb{R}^n | f_A(x) = 0\}$ と f_A の像 $\mathrm{Im}\, f_A = \{f_A(x) \in \mathbb{R}^m | x \in \mathbb{R}^n\}$ がそれぞれ $\mathbb{R}^n$ と $\mathbb{R}^m$ の線形部分空間であることを示せ。

(2) f_A が単射であることと $\mathrm{Ker}\, f_A = \{0\}$ が同値であることを示せ。

(3) $\mathbb{R}^n$ の $k(\leqq n)$ 個のベクトル $v_1, \ldots, v_k$ に対して, $f_A(v_1), \ldots, f_A(v_k)$ が１次独立であれば, $v_1, \ldots, v_k$ が１次独立であることを示せ。

(4) 特に

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \\ -4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

として, 写像 $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ を考えるとき, $\mathrm{Ker}\, f_A$ と $\mathrm{Im}\, f_A$ の次元と基底をそれぞれ求めよ。更に $\mathrm{Im}\, f_A$ の $\mathbb{R}^4$ におけるユークリッド内積に関する直交補空間 $(\mathrm{Im}\, f_A)^{\perp}$ の次元と基底も求めよ。

問　題　紙

佐賀大学大学院工学系研究科

平成26年度佐賀大学大学院工学系研究科（博士前期課程）
入　学　試　験　問　題

科目名	専門科目	（その二）	数理科学専攻

$\boxed{2}$ $A = (a_{ij})$ を n 次実正方行列, $(\mathbb{R}^n, (\cdot,\cdot))$ を前問で考えた n 次元数ベクトル空間とする。そこで $f_A(x) = Ax\,(x \in \mathbb{R}^n)$ によって定まる線形写像 $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ に関して次の問いに答えよ。

(1) f_A の異なる固有値 λ, μ に対応する固有ベクトル $x, y \in \mathbb{R}^n$ は, 1次独立であることを示せ。

(2) A が対称行列であれば, f_A の異なる固有値 λ, μ に対応する固有ベクトル $x, y \in \mathbb{R}^n$ は, ユークリッド内積に関して直交することを示せ。

(3) 実対称行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

によって定まる $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ の固有値を求めよ。更に $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底で f_A の固有ベクトルになっているものを一組求めよ。

問　題　紙

佐賀大学大学院工学系研究科

平成26年度佐賀大学大学院工学系研究科（博士前期課程）
入　学　試　験　問　題

科目名	専門科目	（その三）	数理科学専攻

$\boxed{3}$ (1) 累次積分

$$\int_0^{\pi} \left(\int_0^{x} x \cos y \, dy \right) dx$$

の値を求めよ.

(2) 極座標を用いて,次の重積分の値を求めよ.

$$\iint_D \frac{y}{x^2+y^2} dxdy, \quad D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leqq y\}.$$

問　題　紙

佐賀大学大学院工学系研究科

平成26年度佐賀大学大学院工学系研究科（博士前期課程）
入学試験問題

科目名	専門科目	（その四）	数理科学専攻

4 (1) 「$\lim_{n\to\infty} x_n = a$」の定義を ε, n 論法を用いて書け.

(2) $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ のとき, 次の式を証明せよ.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = a.$$