平成１９年度
佐賀大学大学院工学系研究科 数理科学専攻
入学試験問題

専門科目（線形代数学，微分積分学）

注意事項：

- 全問解答すること.
- 解答紙は裏も使用してよい.
- 各問題につきそれぞれ異なる解答紙を用い，各解答紙の所定の欄に受験番号を，左上隅に解答した問題の番号を記入すること.
- 解答紙はすべて提出すること.
- 問題紙は面接の際に提出すること.

問　　題　　紙

佐賀大学大学院工学系研究科

平成１９年度佐賀大学大学院工学系研究科（博士前期課程）
入　学　試　験　問　題

科目名	専門科目	（その一）	数理科学専攻

$\boxed{1}$ 実数 a について,

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ a+1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2a \\ 2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3a-4 \\ 2a-1 \\ a-1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ a^2 \\ 2 \\ a \end{pmatrix},$$

とおく. 以下の問に答えよ.

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_3 & \boldsymbol{x}_4 & \boldsymbol{x}_5 \end{pmatrix}$ の階数 $\mathrm{rank}(A)$ を求めよ.

(2) $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4, \boldsymbol{x}_5$ によって生成される $\mathbf{R}^4$ の部分空間

$$L = \{c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + c_3\boldsymbol{x}_3 + c_4\boldsymbol{x}_4 + c_5\boldsymbol{x}_5 \mid c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \in \mathbf{R}\}$$

の次元と１組の基底を求めよ.

問　題　紙

佐賀大学大学院工学系研究科

平成１９年度佐賀大学大学院工学系研究科(博士前期課程)
入　学　試　験　問　題

科目名	専門科目	（その二）	数理科学専攻

$\boxed{2}$ n 次の実行列 A とベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n$ に対し

$$\langle \boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{y}\rangle_A := \langle \boldsymbol{x}\,,\,A\boldsymbol{y}\rangle\,(= \boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{y})$$

により $\langle \boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{y}\rangle_A$ を定義する．ただし，上の式の右辺の $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle$ は $\mathbf{R}^n$ の標準内積である．このとき，次の (1), (2), (3) に答えよ．

(1) n 次の実行列 A が実対称行列かつ正値（正定値）であるとき，$\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle_A$ は次の (i), (ii), (iii) をみたすことを示せ.（n 次の実対称行列 A が正値であるとは，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$ $(\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0})$ に対し，$\boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x} > 0$ となることである.）

  (i) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n$ に対し，$\langle \boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{y}\rangle_A = \langle \boldsymbol{y}\,,\,\boldsymbol{x}\rangle_A$ である．

  (ii) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbf{R}^n$ と任意の $a, b \in \mathbf{R}$ に対し，$\langle a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y}\,,\,\boldsymbol{z}\rangle_A = a\langle \boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{z}\rangle_A + b\langle \boldsymbol{y}\,,\,\boldsymbol{z}\rangle_A$ である．

  (iii) 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$ に対し，$\langle \boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{x}\rangle_A \geq 0$ である．また，$\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$ に対し，$|\boldsymbol{x}|_A := \sqrt{\langle \boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{x}\rangle_A}$ と定義したとき，$|\boldsymbol{x}|_A = 0$ となるのは $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ のときのみである．

(2) 3 次の実対称行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

の固有値を求め，A は正値であることを確かめよ．また，Gram-Schmidt の直交化法を参考にして，

$$\langle \boldsymbol{u}_i\,,\,\boldsymbol{u}_j\rangle_A = \begin{cases} 1 & (i = j \text{ のとき}) \\ 0 & (i \neq j \text{ のとき}) \end{cases}$$

をみたす１組のベクトル $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\} \subset \mathbf{R}^3$ を作れ．

(3) 3 つのベクトル

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

に対し，

$$\langle \boldsymbol{b}_i\,,\,\boldsymbol{b}_j\rangle_A = \begin{cases} 1 & (i = j \text{ のとき}) \\ 0 & (i \neq j \text{ のとき}) \end{cases}$$

を満たす 3 次の正値実対称行列 A を求めよ．

問　題　紙

佐賀大学大学院工学系研究科

平成19年度佐賀大学大学院工学系研究科（博士前期課程）
入　学　試　験　問　題

科目名	専門科目	（その三）	数理科学専攻

$\boxed{3}$ 次の問いに答えよ．

(1) 座標平面上の，円弧 : $x^2+y^2=1,\ x \geq 0,\ y \geq 0$ と x 軸および2直線 $x=0,\ x=\frac{1}{2}$ とによって囲まれる部分の面積の値を求めよ．

(2) $\sqrt{1-x^2}$ を原点を中心とする整級数に展開せよ．そのとき，収束半径と一般項を明示すること．

(3) (1) の面積の値が定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}dx$ の値に等しいことと (2) を用いて，

$$3.14 < \pi < 3.15$$

が成り立つことを示せ．ただし，$\sqrt{3} = 1.7320\cdots$ である．

問　題　紙

佐賀大学大学院工学系研究科

平成１９年度佐賀大学大学院工学系研究科（博士前期課程）
入　学　試　験　問　題

科目名	専門科目	（その四）	数理科学専攻

$\boxed{4}$ 正の数 $\alpha,\, \beta$ に対して，

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty u^{\alpha-1} e^{-u} du,$$
$$B(\alpha,\, \beta) = \int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1} du$$

とする．

(1) 正の数 $\alpha,\, \beta$ に対して，

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = \Gamma(\alpha+\beta)B(\alpha,\, \beta)$$

が成り立つことを示せ．

(2) $D = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1\}$ とする．正の数 $\alpha,\, \beta, \gamma$ に対して，

$$\iint_D x^{\alpha-1} y^{\beta-1} (1-x-y)^{\gamma-1} dxdy = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}$$

が成り立つことを示せ．ただし，一般に $\iint_D f(x,y)\, dxdy$ は関数 f の D における重積分を意味し，$\iint_D f(x,y)\, d(x,\, y)$ と表わしている書物もある．